♦ 東京工業大学入試問題 – 数学 – (整数問題履歴)

各問題の指針における問題番号およびページなどはいずれも拙著『大学入試「整数問題」の類型とその解法』でのものです。

2012 年度 (前期)

実数 a に対して、a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}]$ が n の約数となるものは何個あるか。

指針) 文字 k で表現することになるが、問題 6.2 の解法と同じように不等式をつくるのがポイント。

2010 年度 (前期)

a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$(*) \qquad x = \left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)\right]$$

が解を持たないような a を小さい順に並べたものを $a_1, a_2, a_3, \cdots$ とする。ここに $[\ \ ]$ はガウス記号で、実数 u に対し、$[u]$ は u 以下の最大の整数を表す。

(1) $a = 7, 8, 9$ の各々について $(*)$ の解があるかどうかを判定し、ある場合は解 x を求めよ。

(2) a_1, a_2 を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

指針) 小問の流れは無視した方がよいだろう。ガウス記号(→第 6 章)の定義より $(*)$ の解は $x^2 \leqq a < x^2 + 2x$ を満たす整数 x であることがすぐにわかり、さらにこれから $a_n = (n+1)^2 - 1$ が求まる。

2009 年度 (前期)

N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組 (m, n) で、方程式 $x^2 - nx + m = 0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

指針) 2 つのテーマ「解の配置・格子点の個数」の融合問題。$f(x) = x^2 - nx + m$ について $y = f(x)$ のグラフを考れば $f(N) \leqq 0$ が m, n の条件とわかる。さらに領域を図示すると $N = 1, 2, N \geqq 3$ の場合分けをして数えればよいことがわかる。

2007 年度 (前期)

p を素数、n を 0 以上の整数とする。

(1) m は整数で $0 \leqq m \leqq n$ とする。1 から p^{n+1} までの整数の中で、p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。

(2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x, y に対し、その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 (x, y) の個数を求めよ。

指針) (1) 倍数についての基本問題。(2) 個数処理の問題では重複なくすべてを数えることが本質。ここでは p が x を割り切る最大の回数を m として考えると(1)も利用出来てわかりやすい。ただし(1)の条件が $0 \leqq m \leqq n$ であったことには注意が必要。

2007年度（後期）

1から6までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを3回振って出た目を順に n_1, n_2, n_3 とし、次の3次方程式を考える。

$$x^3 - n_1 x + (-1)^{n_2} n_3 = 0$$

(1) この方程式が相異なる3個の実数解をもつ確率を求めよ。

(2) この方程式が自然数の解をもつ確率を求めよ。

指針）(1) 3次関数のグラフから条件に合う n_1, n_2, n_3 の満たすべき関係がわかる。(2) 問題4.2と同じテーマの問い。

2006年度（後期）

自然数 a, b, c が $3a = b^3$, $5a = c^2$ を満たし、d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする。

(1) a は3と5で割り切れることを示せ。

(2) a の素因数は3と5以外にないことを示せ。

(3) a を求めよ。

指針）(1) a, b, c の条件を用いるだけ。(2) 仮に3, 5以外の素因数を持つとすると・・、d の条件がポイントになる。(3) (2)から考えるべき a がわかる。

2003年度（後期）

m を0以上の整数とする。直線 $2x + 3y = m$ 上の点 (x, y) で、x, y がともに0以上の整数であるものの個数を $N(m)$ とする。

(1) $N(m+6) = N(m) + 1$ を証明せよ。

(2) $N(m) = 1 - m + \left[\dfrac{m}{2}\right] + \left[\dfrac{2m}{3}\right]$ を証明せよ。ただし、$[a]$ は a 以下の最大の整数を表すものとする。

指針）直線 $2x + 3y = m$ 上のすべての格子点を求めることさえ出来れば(→問題5.5参照)、$N(m) = \left(\dfrac{m}{2} \leqq t \leqq \dfrac{2m}{3}\right.$ を満たす整数 t の個数$\left.\right)$ であることがわかり、それを用いるだけでどちらの小問も簡単に解ける。なお(2)は6で割った余りで分類してガウス記号(第6章参照)の計算をすればよい。

1997年度（前期）

(1) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}$ をみたす自然数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ。

(2) n を自然数、r を正の有理数とする。このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = r$ をみたす自然数 x_k の組 $(x_1, \cdots, x_n)$ の個数は有限であることを示せ。

指針）(1) 問題5.8の数字違い。(2) 数学的帰納法の問題。

1996 年度（前期）

　2 以上の整数 n に対して方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n$ の正の整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を考える。ただし、たとえば $(1,2,3)$ と $(3,2,1)$ は異なる解とみなす。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $n=2$ および $n=3$ のときの解をすべて求めよ。

(2) 解が 1 つしかないような n をすべて求めよ。

(3) 任意の n に対して解は少なくとも 1 つ存在し、かつ有限個しかないことを示せ。

指針）問題集収録題。（問題 5.9）

1995 年度（前期）

　$n=1,2,3,\cdots$ に対して、数列 $a(n)=\dfrac{(n+2)(n+3)(n+4)}{n!}$ を考える。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a(n)$ を求めよ。

(2) $a(n)$ が整数となる n をすべて求めよ。

(3) 積 $a(1)a(2)\cdots a(n)$ が整数となる n をすべて求めよ。

指針）(1) これはそう難しくない。(2)(3) どちらも $n=1,2,\cdots$ と順に調べてゆけば、結果はすぐにわかる。問題はどう説明するかだが、増減を調べるのがわかりやすそう。

1994 年度（前期）

　2 つの負でない整数 m,n に対して、和 $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m+n}k\right)+n$ を考え、これを $f(m,n)$ と書くことにする。ただし $f(0,0)=0$ とする。

(1) $f(m,n)\leqq 5$ をみたす点 (m,n) の位置を、座標平面上に図示せよ。

(2) $f(m,n)=f(m',n')$ ならば $(m,n)=(m',n')$ であることを示せ。

指針）(1)で座標平面上の (m,n) の位置に $f(m,n)$ の値を具体的に書いてみると群数列の問題とわかる。(2)は対偶証明がわかりやすい。なおその際、ちょっとした場合分け(ここで群数列と掴めているかが重要になる)が必要になる。

1994 年度（後期）

　自然数 $n=1,2,3,\cdots$ に対して、$(2-\sqrt{3})^n$ という形の数を考える。これらの数はいずれも、それぞれ適当な自然数 m が存在して $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ という表示をもつことを示せ。

指針）問題 7.3 とほぼ同内容。

1993 年度（前期）

　n を自然数、$P(x)$ を n 次の多項式とする。$P(0),P(1),\cdots,P(n)$ が整数ならば、すべての整数 k に対し、$P(k)$ は整数であることを証明せよ。

指針）n についての数学的帰納法で。仮定をどう用いるかだが $Q(x)=P(x+1)-P(x)$ を考えるのがわかりやすいだろう。

1993 年度（後期）

$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ とし、正の整数 n に対し $A^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix}$ とおく。

（1）a_n, b_n, c_n, d_n を求めよ。

（2）a_n, b_n, c_n, d_n を 3 で割った余りを $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$ と書く。$\begin{pmatrix}\alpha_n&\beta_n\\\gamma_n&\delta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ となるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ。

指針）（1）$A=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$ について A^n がどうであるかは典型問題。数学的帰納法で事実を証明するのが簡単か。（2）本質は問題 3.13(数字違い)。

1992 年度（前期）

x の関数 $\dfrac{x^2-2x+k^2}{x^2+2x+k^2}\ (k\geqq 0)$ が 1 以外の整数値をとらないような定数 k の値の範囲を求めよ。

指針）整数問題というよりも分数関数のグラフ、特に連続性についての問い。分母 $=0$ が実数解をもつかどうかの場合分けがポイントになるが、最初に分数を変形してより扱いやすい形にしたいところ。

1991 年度（前期）

n を正の整数とする。10 進法で表した $n!$ について、1 の位から 10^{m-1} の位までの数字がすべて 0 で、10^m の位の数字が 0 でないとき、関数 $f(n)$ の値を m とする。このとき、次の値を求めよ。

（1）$f(10),\ f(100)$　　　（2）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(10^n)}{10^n}$

指針）（1）問題 1.7(2)の数字違い。（2）(1)と同じ方法で $f(10^n)$ を考える。ただし最後ははさみうちで、特に $(2^n)!$ が 5 で何回割り切れるかを $(5^n)!$ を用いて抑えるような工夫が必要。

1991 年度（前期）

さいころを 3 回振って出た目を a, b, c とする。このとき、方程式 $x^3-ax^2+bx-c=0$ が少なくとも 1 個の整数解をもつ確率を求めよ。

指針）問題 4.2(1)と確率の融合問題。整数解になる x はいくつかに絞れるので、それぞれについて (a, b, c) の個数を求めればよい。

1991 年度（後期）

10 進法表示の n 桁の正の整数で、隣り合う桁の数字が互に相異なるような数の個数を a_n とするとき、次の問いに答えよ。

（1）a_n を求めよ。

（2）上の数のうちで、1 の位の数字が 0 であるものの個数を b_n とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

指針）（1）基本問題。（2）条件を満たす a_n 個のうちで 1 の位の数が 0 であるものが b_n 個であるが、そうでないものを c_n 個として $\{b_n\}, \{c_n\}$ についての連立漸化式を考えるのがわかりやすいか。これと(1)から $\{b_n\}$ についての隣接 2 項間漸化式が得られるのでそれを解けば一般項 b_n が求まる。極限計算は基本。

最終更新日 2012.3/20

◇ web サイト「ky の書架」には東京工業大学以外にも東京大学・京都大学などの整数問題過去問を PDF ファイルで UP してあります。興味のある方は URL（http://kynoshoka.com/）を入力するか、"ky の書架"で google または yahoo 検索をしてサイトにアクセスして下さい。