♦ 京都大学入試問題 – 数学 –（整数問題履歴）

各問題の指針における問題番号およびページなどはいずれも拙著『大学入試「整数問題」の類型とその解法』でのものです。

2012 年度（理）

(1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で、$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。

指針）(1) 定番。(2) どちらかというと整式の除法の問題。最後は(1)を用いることになる。

2010 年度（理・乙）

次の問に答えよ。

(1) n を正の整数、$a=2^n$ とする。3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ。

(2) m を正の偶数とする。3^m-1 が 2^m で割り切れるならば $m=2$ または $m=4$ であることを示せ。

指針）(1) 3^a-1 がどう表現されるか(→問題 8.15(1)参照)さえ間違えなければ数学的帰納法で簡単。(2) 少し難しいが m の 2 進法表示(→ 7 章参照)がポイント。(1)を用いることで m を 2 進法で表すと最高位だけが 1 で残りはすべて 0 とわかる。あとは桁数の問題。

2009 年度（理・乙）

a と b を互いに素、すなわち 1 以外の公約数を持たない正の整数とし、さらに a は奇数とする。正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を $(a+b\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ をみたすように定めるとき、次の(1), (2)を示せ。ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(1) a_2 は奇数であり、a_2 と b_2 は互いに素である。

(2) すべての n に対して、a_n は奇数であり、a_n と b_n は互いに素である。

指針）問題集収録題。(問題 8.39)

2009 年度（理・甲, 文系）

p を素数、n を正の整数とするとき、$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。

指針）問題 1.7 の数字違い。

2007 年度（理・文共通）

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\ ad-bc+p=0,\ a\geqq b\geqq c\geqq d$$

を満たすとき、a, b, c, d を p を用いて表せ。

指針）問題 1.4 で指摘した手法を用いる。

2006 年度（理）

2 以上の自然数 n に対し、n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。

指針）問題 3.5 (2)(イ)とほぼ同じ内容。あるいは問題 8.24 の類題。

2006 年度（後期－理・文共通）

$\tan 1^\circ$ は有理数か。

指針）$\tan 1^\circ$ が有理数とすると・・。

2005 年度（文）

$a^3-b^3=65$ を満たす整数の組 (a,b) をすべて求めよ。

指針）問題 5.16 の数字違い。

2005 年度（理）

$a^3-b^3=217$ を満たす整数の組 (a,b) をすべて求めよ。

指針）やはり問題 5.16 の数字違い。

2004 年度（文）

n, a, b を 0 以上の整数とする。a, b を未知数とする方程式（$*$）$a^2+b^2=2^n$ を考える。

（1）$n \geqq 2$ とする。a, b が方程式 $(*)$ を満たすならば、a, b はともに偶数であることを証明せよ。（ただし、0 は偶数に含める。）

（2）0 以上の整数 n に対して、方程式 $(*)$ を満たす 0 以上の整数の組 (a,b) をすべて求めよ。

指針）（1）問題 3.8(2)の類題。（2）$n=0,1$ についてはすぐにわかる。$n \geqq 2$ のときは(1)を繰り返し適用することで・・。（↔ そのものではないが、無限降下法は問題 5.18 のテーマ。）

2004 年度（後期－理）

n を自然数とする。次の 3 つの不等式(1), (2), (3)をすべて満たす自然数の組 (a,b,c,d) はいくつあるか。n を用いてあらわせ。

（1）$1 \leqq a < d \leqq n$　　（2）$a \leqq b < d$　　（3）$a < c \leqq d$

指針）整数問題というより個数処理・数列の和の問題。$d-a=k$（$k=1,2,\cdots,n-1$）であるものの個数 p_k が k で表せる。

2004 年度（後期－理）

n を自然数とする。xy 平面内の、原点を中心とする半径 n の円の、内部と周をあわせたものを C_n であらわす。次の条件 $(*)$ を満たす 1 辺の長さが 1 の正方形の数を $N(n)$ とする。

$(*)$　正方形の 4 頂点はすべて C_n に含まれ、4 頂点の x および y 座標はすべて整数である。

このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n^2}=\pi$ を証明せよ。

指針）問題 6.6 の練習の類題。

2003 年度（文系）

p は 3 以上の素数であり、x, y は $0 \leqq x \leqq p,\ 0 \leqq y \leqq p$ をみたす整数であるとする。このとき x^2 を $2p$ で割った余りと、y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ、$x = y$ であることを示せ。

指針）問題 3.2、問題 1.6 の手引き(i)、問題 3.3(練習)の手引きでの確認事項を順に使うだけ。

2002 年度（文系）

4 個の整数 $1, a, b, c$ は $1 < a < b < c$ を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると、$1 + a$ から $b + c$ までのすべての整数の値が得られるという。a, b, c の値を求めよ。

指針）問題集収録題。（問題 8.6）

2002 年度（理・文共通）

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x) = 0$ の重複も込めた 4 つの解のうち、2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。

指針）整数解がどうなるかはすぐにわかる(→第 4 章あるいは問題 8.29 参照)。あとは因数定理で・・。

2002 年度（後期－理）

$f(x)$ は x^n の係数が 1 である x の n 次式である。相異なる n 個の有理数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ に対して $f(q_1), f(q_2), \cdots, f(q_n)$ がすべて有理数であれば、$f(x)$ の係数はすべて有理数であることを、数学的帰納法を用いて示せ。

指針）$n \to n+1$ については整式の割り算 $f(x) = (x - q_{n+1})Q(x) + r$ を用いる。

2001 年度（文）

任意の整数 n に対し、$n^9 - n^3$ は 9 で割り切れることを示せ。

指針）連続 3 整数の積か剰余類か迷うところだが・・。（どちらでも解ける。）

2001 年度（後期－理）

方程式 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 2yz - 5 = 0$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) をすべて求めよ。

指針）問題集収録題。（問題 5.17 の練習）

2000 年度（文系）

三角形 ABC において辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。この三角形 ABC は次の条件(イ), (ロ), (ハ)を満たすとする。

(イ) ともに 2 以上である自然数 p と q が存在して、$a = p + q,\ b = pq + p,\ c = pq + 1$ となる。

(ロ) 自然数 n が存在して a, b, c のいずれかは 2^n である。

(ハ) $\angle A, \angle B, \angle C$ のいずれかは 60° である。

このとき次の問に答えよ。

（1）$\angle A, \angle B, \angle C$ を大きさの順に並べよ。

（2）a, b, c を求めよ。

指針）（1）a, b, c の大小関係はすぐにわかる。（2）（1)からどの角が $60°$ かがわかる。さらにそれから p, q の関係がわかる。

2000 年度 （理系）

p を素数、a, b を互いに素な正の整数とするとき、$(a+bi)^p$ は実数ではないことを示せ。ただし i は虚数単位を表す。

指針）ちょっとした場合分けは必要だが、虚数部分($A+Bi$（A, B は実数）としたときの B)は a, b で表されるので、それを $=0$ と仮定して a^2 で割るのがわかりやすいか。

2000 年度 （後期－文系）

xy 平面上の点で x 座標、y 座標がともに整数である点を格子点という。

（1）格子点を頂点とする三角形の面積は $\dfrac{1}{2}$ 以上であることを示せ。

（2）格子点を頂点とする凸四角形の面積が 1 であるとき、この四角形は平行四辺形であることを示せ。

指針）（1）2 つのベクトル $\overrightarrow{p}=(a, b)$, $\overrightarrow{q}=(c, d)$ のつくる三角形の面積公式を用いるだけ。（2）四角形が平行四辺形となるための十分条件はいくつかあるが・・。(1)の結果を利用するとあっという間。

2000 年度 （後期－理系）

xy 平面上の点で x 座標、y 座標がともに整数である点を格子点という。a, k は整数で $a \geqq 2$ とし、直線 $L: ax+(a^2+1)y=k$ を考える。

（1）直線 L 上の格子点を 1 つ求めよ。

（2）$k=a(a^2+1)$ のとき、$x>0, y>0$ の領域に直線 L 上の格子点は存在しないことを示せ。

（3）$k>a(a^2+1)$ ならば、$x>0, y>0$ の領域に直線 L 上の格子点が存在することを示せ。

指針）（1）具体的に考えればそう難しくない。（2）（3）問題 5.5 (1)解答の注および問題 2.5 を参照のこと。

1999 年度 （文系）

0 以上の整数 x に対して、$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする。たとえば、$C(12578)=78$, $C(6)=6$ である。n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする。

（1）x, y が 0 以上の整数のとき、$C(nx)=C(ny)$ ならば、$C(x)=C(y)$ であることを示せ。

（2）$C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ。

指針）鳩の巣原理を利用する典型題である。問題集収録題。(問題 7.2)

1999 年度 （理系）

以下の問に答えよ。ただし、$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい。

（1）有理数 p, q, r について、

$$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0 \text{ ならば、} p=q=r=0$$

であることを示せ。

（2）実数係数の 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ について、$f(1)$, $f(1+\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ。

指針）(1) そのままではうまくいかないので $p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ を変形する。問題 5.5 の練習題(香川医科大)の(1)の解答参照。(2) 背理法によるが a, b の条件(実数)はありがたくないので・・。

1999 年度 （後期 – 文系）

自然数 a, b, c について、等式 $a^2+b^2=c^2$ が成り立ち、かつ a, b は互いに素とする。このとき、次のことを証明せよ。

(1) a が奇数ならば、b は偶数であり、したがって c は奇数である。

(2) a が奇数のとき、$a+c=2d^2$ となる自然数 d が存在する。

指針）問題集収録題。（問題 8.26）

1999 年度 （後期 – 理系）

a, b を整数、u, v を有理数とする。$u+v\sqrt{3}$ が $x^2+ax+b=0$ の解であるならば、u と v は共に整数であることを示せ。ただし $\sqrt{3}$ が無理数であることは使ってよい。

指針）$v=0$ の場合は問題 4.2(2)の数字違い。$v \fallingdotseq 0$ の場合は a, b, v の関係式において、お馴染みの $v=\dfrac{n}{m}$ (m, n は互いに素な整数かつ $m>0$) を用いるのがわかりやすいだろう。

最終更新日 2012.3/20