♦ 一橋大学入試問題－数学－（整数問題履歴）

各問題の指針における問題番号およびページなどはいずれも拙著『大学入試「整数問題」の類型とその解法』でのものです。

2016 年度

$6\cdot 3^{3x}+1=7\cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ。

指針）指数の基本性質から両辺の大小関係が推測出来る。

2016 年度（後期）

m を整数とする。3 次方程式 $x^3+mx^2+(m+8)x+1=0$ は有理数解 α を持つ。

（1）α は整数であることを示せ。

（2）m を求めよ。

指針）（1）問題 4.2(3) ⅲの前半と同問。（2）問題 4.2(3) ⅲの後半を用いることになる。

2015 年度

n を 2 以上の整数とする。n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す。たとえば $E(2)=1, E(3)=2, E(4)=2, \cdots, E(10)=4, \cdots$ である。

（1）$E(1024)$ を求めよ。

（2）$E(1025)$ を求めよ。

（3）m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする。$n=p^m q^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n}\geqq\dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ。

指針）最後の不等式の証明はうまく変形すると綺麗に終わる。(オイラー関数の一つの基本的な表現を意識した出題である。) それ以外は問題 2.2 とその練習題の数字違い。

2015 年度（後期）$\boxed{1}$

x, y, z を整数とする。

（1）$y\neq 0$ かつ $yz\neq -1$ のとき，$\left|y+\dfrac{1}{z}\right|$ の最小値を求めよ。

（2）$\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\frac{1}{z}}}=\dfrac{9}{11}$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

指針）（1）数直線上での 2 数 $y, -\dfrac{1}{z}$ の位置関係を考えれば良い。（2）(1) より x の値を何通りかに絞れる。

2015 年度（後期）$\boxed{2}$

p, q を実数とする。2 次関数 $f(x) = x^2 - px + 108q$ のグラフ $y = f(x)$ が直線 $12x + 4y + 9 = 0$ と接している。2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの整数解を持つならば，q は 0 以上の整数であることを証明せよ。

指針）問題 5.14 と問題 1.12 の応用題。素直に解の公式を用いれば $p = 6n^2$ (ただし n は正整数) が分かり、それを利用する。

2014 年度

$a - b - 8$ と $b - c - 8$ が素数となるような素数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

指針）問題 8.24（2005 年度一橋大後期）の類題。偶数・奇数の場合分けから考え始めるのは一つの原則。

2014 年度（後期）

$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13)^{10}$ の 10 進法での桁数を求めよ。

指針）問題 8.4(2) と同一テーマ。ただし本題の方が解きやすい。$3000 < 3003 < 4000$ では評価が荒く、別の挟み方が必要。(整数で挟まないといけない訳ではない。)

2013 年度

$3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013$ を満たす正の整数 p, q の組をすべて求めよ。

指針）問題 5.16 の数字が変わっただけの内容。このテーマについては 2009 年度にも本大学で出題されている。

2013 年度（後期）

（1）正の実数 x, y, z が $x^2 = y^2 + z$ を満たすとき $y < x < y + \dfrac{z}{2y}$ が成り立つことを示せ。

（2）$x^2 = y^2 + 8\sqrt{2y - 1}$ を満たす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。

指針）（2）お馴染みの不定方程式(第 5 章のテーマ)の問題。(1) で示した不等式を用いることで y の値が絞られる。その際、問題 1.13 の解法で必要になるのと逆の性質を使うことになる。

2012 年度

1 つの角が $120°$ の三角形がある。この三角形の 3 辺の長さ x, y, z は $x < y < z$ を満たす整数である。

(1) $x + y - z = 2$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

(2) $x + y - z = 3$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

(3) a, b を 0 以上の整数とする。$x + y - z = 2^a 3^b$ を満たす x, y, z の組の個数を a と b の式で表せ。

指針) (1) 最大辺はどれかということと、角 $120°$ という条件の使い方が分かれば難しくない。最後は問題 5.7 の数字違い。(2) (1) と全く同じ方法で良い。(3) やはり (1) と同じ処理で良く、最後は問題 1.8(2) の数字違い。

2012 年度 (後期)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。$\log_2(4\sin^2\theta + 3\cos\theta - 4)$, $\log_2(-4\cos^3\theta + 3\cos\theta + 1)$ がともに整数となるような θ の値をすべて求めよ。

指針) それぞれ真数が 2 の整数乗になることが考えるべき条件。θ の変化に対して真数がどのような値をとるかを調べるのは一つの方法。

2011 年度

(1) 自然数 x, y は、$1 < x < y$ および $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{5}{3}$ をみたす。x, y の組をすべて求めよ。

(2) 自然数 x, y, z は、$1 < x < y < z$ および $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(1 + \dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{12}{5}$ をみたす。x, y, z の組をすべて求めよ。

指針) (1) 問題 5.7(1) あるいは問題 5.8(1) と数字が違うだけの内容。(2) 問題 5.8(2) の類題で、全く同じ方法で x の値はすぐにわかる。その後 y も同様の方法ですぐに求まる。

2010 年度 1

実数 p, q, r に対して、3 次多項式 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ と定める。実数 a, c および 0 でない実数 b に対して、$a + bi$ と c はいずれも方程式 $f(x) = 0$ の解であるとする。ただし、i は虚数単位を表す。

(1) $y = f(x)$ のグラフにおいて、点 $(a, f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし、点 $(c, f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。$a \fallingdotseq c$ のとき、$s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。

(2) さらに、a, c は整数であり、b は 0 でない整数であるとする。次を証明せよ。

(i) p, q, r はすべて整数である。

(ii) p が 2 の倍数であり、q が 4 の倍数であるならば、a, b, c はすべて 2 の倍数である。

指針) (1) 整数問題ではないが・・a, b, c, p, q, r の関係さえ分かれば、大小比較の原則に従うだけ。(2) 問題 4.5 と問題 3.3 の練習(2 題目)あるいは問題 8.25 との融合題。

2010 年度 $\boxed{4}$

0 以上の整数 a_1, a_2 があたえられたとき、数列 $\{a_n\}$ を $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ により定める。

(1) $a_1 = 1, a_2 = 2$ のとき、a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。

(2) $a_2 = 3a_1$ のとき、$a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。

指針)(1)問題 3.13 と同一テーマ。あるいは問題 7.3 の練習(2 題目)解答の注参照。(周期を考えると、厳密な証明は要求されていないと思われる。)(2)$\{a_n\}$ は条件から等比数列で・・。(1)よりも簡単。

2010 年度 (後期)

a を正の奇数とする。次の(i), (ii)を満たす整数 b, c の組がちょうど 3 つ存在するような最小の a を求めよ。

(i) a, b, c は直角三角形の 3 辺の長さである。 (ii) $a < b < c$

指針)問題 1.8 , 問題 5.13 の練習の応用題。しらみつぶしでもすぐにみつかるが・・、問題 1.8 との関連に気付くと簡単になる。

2009 年度

2 以上の整数 m, n は $m^3 + 1^3 = n^3 + 10^3$ をみたす。m, n を求めよ。

指針)問題 5.16 の数字が変わっただけの内容。

2009 年度 (後期)

$\alpha = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}, \beta = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ とおく。すべての自然数 n に対して、$\alpha^n + \beta^n$ は自然数であることを示せ。

指針)$\alpha+\beta, \alpha\beta$ がともに自然数であることさえいえれば(→問題 8.28 の数字が異なるだけの内容)、後は数学的帰納法の典型問題。

2008 年度

k を正の整数とする。$5n^2 - 2kn + 1 < 0$ をみたす整数 n が、ちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ。

指針)グラフを考えることで $n = 1$ は不等式を満たし、$n = 2$ は不等式を満たさない条件が求めるものとすぐにわかる。どのようなグラフを使えば良いかは各自考えてみること。なお方程式・不等式の解をグラフで処理させる問題は一橋大学の入試ではよく見掛けるタイプ。(例えば 2005 年度・2001 年度など)

2008 年度 (後期)

実数 x に対して、$n \leqq x < n+1$ をみたす整数 n を $[x]$ と表す。

(1) $\dfrac{1}{2}([x] - [y])$ が整数となる点 (x, y) の全体からなる領域を、xy 平面上に図示せよ。

(2) $\dfrac{1}{2}\left(\left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{y}{3}\right]\right)$ が整数となる点 (x, y) の全体からなる領域を、xy 平面上に図示せよ。

指針)第 6 章ガウス記号参照。

2007 年度

m を整数とし、$f(x)=x^3+8x^2+mx+60$ とする。

（1）整数 a と、0 ではない整数 b で、$f(a+bi)=0$ を満たすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし、i は虚数単位である。

（2）(1)で求めたすべての m に対して、方程式 $f(x)=0$ を解け。

指針）問題 4.5 の数字が変わっただけの内容。

2007 年度 （後期）

直角をはさむ二辺の長さが a, b の直角三角形がある。内接円の半径を r とする。

（1）r を a, b で表せ。

（2）a, b は整数とし、$r=5$ とする。このような a, b の組をすべて求めよ。

指針）（1）辺の長さと内接円の半径について $S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$ は重要であるが、ここでは直角三角形の場合の関係を使いたい。（2）問題 5.7 の応用題。

2006 年度

次の条件 (a) , (b) をともに満たす直角三角形を考える。ただし、斜辺の長さを p, その他の 2 辺の長さを q, r とする。

(a) p, q, r は自然数で、そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b) $p+q+r=132$

（1）q, r のどちらかは偶数であることを示せ。

（2）p, q, r の組をすべて求めよ。

指針）（1）問題 3.8 参照。（2）(1)を使うならば $p+q+r=132$ と $p^2=q^2+r^2$ から p を消去した式を考えればよい。（以下問題 5.7 のパターンだが q, r の性質を(1)からさらに踏み込んで説明できないときつい。）なお(1)を利用せずとも、ここでは q を素数としたとき $q^2=p^2-r^2$ からあることがわかり(問題 1.4 の類題)、それを用いるとかなり楽になる。

2006 年度 （後期）

正の整数 n に対して、$n=k+2l$ をみたすような 0 以上の整数の組 (k, l) の個数を a_n とする。また、$n=p+2q+3r$ をみたすような 0 以上の整数の組 (p, q, r) の個数を b_n とする。

（1）a_n を n で表せ。

（2）n が 6 の倍数のとき、b_n を n で表せ。

指針）どちらかというと個数処理・数列の和の問題であるが・・。(1)で n が偶数のときと奇数のときの a_n をまとめて表すことさえ出来れば(2)も簡単である。

2005 年度

k は整数であり、3 次方程式 $x^3-13x+k=0$ は 3 つの異なる整数解をもつ。k とこれらの整数解をすべて求めよ。

指針）3 次関数のグラフがポイント。

2005 年度 （後期）

（1） $p, 2p+1, 4p+1$ がいずれも素数であるような p をすべて求めよ。

（2） $q, 2q+1, 4q-1, 6q-1, 8q+1$ がいずれも素数であるような q をすべて求めよ。

指針）問題集収録題。（問題 8.24）

2004 年度

a, b, c は整数で、$a<b<c$ を満たす。放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{A}(a, a^2), \mathrm{B}(b, b^2), \mathrm{C}(c, c^2)$ をとる。

（1） $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ とはならないことを示せ。ただし、$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい。

（2） $a=-3$ のとき、$\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ となる組 (b, c) をすべて求めよ。

指針）（1） xy 平面での 2 直線のなす角をどう考えればよいかというだけの問題。（2）問題 5.7 と同内容。

2004 年度 （後期）

（1） すべての正の奇数 k は、$m>n\geqq 0$ をみたす整数 m, n によって $k=m^2-n^2$ と表されることを示せ。

（2） 正の偶数 k で、$m>n\geqq 0$ をみたす整数 m, n によって $k=m^2-n^2$ と表されるものをすべて求めよ。

指針）問題集収録題。（問題 3.10 の練習）

2003 年度

（1） 正の整数 n で n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

（2） 正の整数 n で n^n+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

指針）剰余類の問題。(2)は $(3m+2)^n$ を考えることになるがこの部分については問題 3.13 参照。

2003 年度 （後期）

n を正の整数とする。

（1） $x^2+y<n^2$ をみたす正の整数 x, y の組 (x, y) の個数 a_n を求めよ。

（2） $\sqrt{x^2+y}$ を超えない最大の整数が n であるような正の整数 x, y の組 (x, y) の個数 b_n を求めよ。

指針）（1）問題 6.6 の類題。（2）第 6 章ガウス記号参照。

2002 年度

k, x, y は正の整数とする。三角形の 3 辺の長さが $\dfrac{k}{x}, \dfrac{k}{y}, \dfrac{1}{xy}$ で、周の長さが $\dfrac{25}{16}$ である。k, x, y を求めよ。

指針）三角形の成立条件がわかっていますかという問いで、それから x, y の関係がすぐにわかる。そして最後は問題 5.6 あるいは問題 5.13 と同内容。

2001 年度

a, b を整数とする。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 実数解 α, β, γ をもち、$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で、α, β, γ のうちどれかは整数である。a, b を求めよ。

指針）整数解はすぐにわかる。→問題 4.2 の(練習)(1)参照。さらに最後はグラフを用いる。

2001 年度（後期）

m を正の整数とする。m^3+3m^2+2m+6 はある正の整数の 3 乗である。m を求めよ。

指針）立方数は順に $1^3, 2^3, 3^3, \cdots$ で、隣り合う項の間には立方数はない。m がある値よりも大きいとき m^3+3m^2+2m+6 は隣り合う立方数の間の数になる。

2000 年度

a, b, c, d を正の整数とする。複素数 $w=a+bi$, $z=c+di$ が $w^2z=1+18i$ を満たす。a, b, c, d を求めよ。

1999 年度

p, q は素数で、$p<q$ とする。

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは、$p=2$, $q=3$ のときに限ることを示せ。

指針）問題集収録題。(問題 1.6)

最終更新日 2016.7/11

◇ web サイト「ky の書架」には一橋大学以外にも東京大学・京都大学・東京工業大学の整数問題過去問を PDF ファイルで UP してあります。興味のある方は URL（http://kynoshoka.com/）を入力するか、"ky の書架"で google または yahoo 検索をしてサイトにアクセスして下さい。