♦ 東京大学入試問題 – 数学 – (整数問題履歴)

各問題の指針における問題番号およびページなどはいずれも拙著『大学入試「整数問題」の類型とその解法』でのものです。

2013 年度 (理科)

次の命題 P を証明したい。

命題 P　次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数(1 以上の整数)A が存在する。

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)　A を 10 進法で表したとき、1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1) y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2) 命題 P を証明せよ。

指針) p 進法は 7 章参照。(2)は(1)の不等式を利用すればよいが、各辺を $x^3=10^{3n}$ (n は十分大きな整数) で割って、小数点以下の部分を考えさせるのが真新しい出題。

2012 年度 (理科)

n を 2 以上の整数とする。自然数(1 以上の整数)の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

指針) (1)(2)とも「互いに素」(→ 特に問題 2.5(1)) がポイント。その上で(1)は、一方が n 乗数かどうか、で場合分けすると分かり易い。また(2)は 2001 年度一橋大後期日程で出題された問題の応用題で、同様の方針で解ける。

2011 年度

実数 x の小数部分を、$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし、これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して、無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n（$n=1, 2, 3, \cdots$）を次のように順次定める。

$$\text{(i)}\ a_1 = \langle a \rangle \qquad \text{(ii)} \begin{cases} a_n \fallingdotseq 0 \text{ のとき、} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき、} a_{n+1} = 0 \end{cases}$$

(1) $a = \sqrt{2}$ のとき、数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3) a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき、q 以上のすべての自然数 n に対して、$a_n = 0$ であることを示せ。

注）(1)(2)は文科・理科共通問題。(3)は理科のみ。

指針）(1) 小数部分は問題 6.1 のテーマ。(2) 問題 3.2 と同じような条件の言い換えがポイントになる。(3) p を q で割った余りを考えると・・

2009 年度

自然数 $m \geqq 2$ に対し、$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1, {}_m\mathrm{C}_2, \cdots, {}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え、これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) m が素数ならば、$d_m = m$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 k に対し、$k^m - k$ が d_m で割り切れることを、k に関する数学的帰納法によって示せ。

(3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。

注）(1)(2)は文科・理科共通問題。(3)は理科のみ。

指針）(1) 問題 7.1(1)のちょっと毛が生えたぐらいの応用題。(2) 105p(フェルマーの小定理の証明)の前半部と同じ。(3) 問題集収録題(問題 2.4 の練習)。(2)で示されたことを使わない方が簡単である。

2008 年度（文科）

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = p,\ b_1 = p+1 \\ a_{n+1} = a_n + pb_n & (n=1,2,3,\cdots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n & (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

(1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し、次の 2 つの数がともに p^3 で割りきれることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np,\ \ b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2) p を 3 以上の奇数とする。このとき、a_p は p^2 で割りきれるが、p^3 では割り切れないことを示せ。

指針）(1) それぞれを A_n, B_n として A_{n+1}, B_{n+1} を(a_n, b_n を用いないで)A_n, B_n で表せば、あとは簡単。(2) やはり A_p を使えばよい。

2008 年度 （理科）

自然数 n に対し、$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{ 個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば $\boxed{1}=1, \boxed{2}=11, \boxed{3}=111$ である。

（1） m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが、3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

（2） n が 27 で割り切れることが、$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

指針）（1） $\boxed{3^m}=a_m$ として a_m, a_{m+1} の関係(漸化式)をつくると数学的帰納法で簡単に示せる。（2） $10^n\equiv 1 \pmod 9$ より 9 で割り切れるための必要条件はすぐにわかり、$\boxed{9n}$ を考えればよいことになる。やはり $\boxed{9n}=b_n$ として漸化式をつくって考えれば $\{b_n\}$ の周期性がわかる。p 進法と合同式の概念さらには二項展開に慣れていないと厳しいだろう。

2007 年度 （文科）

正の整数の下 2 桁とは、100 の位以上を無視した数をいう。たとえば 2000, 12345 の下 2 桁はそれぞれ 0, 45 である。m が正の整数全体を動くとき、$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。

指針）下 2 桁とは 100 で割った余りである。問題 3.13（1）の類題。

2007 年度 （理科）

n と k を正の整数とし、$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^kP(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば、$P(x)$ の n 次以下の項の係数は、すべて整数であることを示せ。ただし、定数項については、項それ自身を係数とみなす。

指針）二項展開式と数学的帰納法を用いるだけ。

2006 年度 （文科）

n を正の整数とする。実数 x, y, z に対する方程式 $x^n+y^n+z^n=xyz \cdots ①$ を考える。

（1） $n=1$ のとき、①を満たす正の整数の組 (x, y, z) で、$x\leqq y\leqq z$ となるものをすべて求めよ。

（2） $n=3$ のとき、①を満たす正の実数の組 (x, y, z) は存在しないことを示せ。

指針）（1）問題 5.8 の練習(同志社大)の数字違い。（2）問題 5.8 の手引きにある手法を用いると①から考えるべき x, y, z の関係はすぐにわかる。

2006 年度（理科）

次の条件を満たす組 (x, y, z) を考える。

条件 (A) : x, y, z は正の整数で、$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) で、$y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組 (a, b, c) が条件 (A) を満たすとする。このとき、組 (b, c, z) が条件 (A) を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件 (A) を満たす組 (x, y, z) は、無数に存在することを示せ。

指針）(2) a, b, c, z の満たすべき関係を考えれば z はどんな数かがすぐにわかる。問題になるのは条件に合うことの確認だけであろう。(3) (1)(2)を利用するだけ。

2005 年度（文科・理科共通）

3 以上 9999 以下の奇数で、a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

指針）$a^2 \equiv a \pmod{10000}$ を考えるか、$a(a-1)=10000m$ を考えるかの二通りがある。後者に関しては問題 1.6 の手引きで触れた形にした方がわかりやすくなるだろう。なおその際も最後は問題 5.5 の形で考えるか合同式を用いるか、やはり二通りの方法がある。

2004 年度（理科）

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

(1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し、10 の位の数を a, 1 の位の数を b とおいたとき、$a+b$ が偶数となるならば、b は 0 または 4 であることを示せ。

(2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し、1000 の位の数、100 の位の数、10 の位の数、および 1 の位の数の 4 つすべてが同じ数となるならば、その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。

指針）(1) いくつか方法はあるが、素直に $(100l+10m+n)^2$ を考えるのがわかりやすいか。(2) (1)で示したことから平方数の下 4 桁が 4444 でないことをいえばよい。下 2 桁が 44 となる (m, n) は(1)の考察で 4 組に絞られるので、そのそれぞれを考えればよい。

2004 年度 （後期）

集合 A, B を $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{0,1\}$ とし、N を 3 以上の整数とする。また、各項が 0 または 1 からなる数列を 01 数列と呼ぶことにする。01 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ に対し、A から B への写像 f を用いて、新しい 01 数列 $b_1, b_2, \cdots, b_N$ を、

$$b_1=f(a_1)\,,\ b_2=f(2a_1+a_2)\,,\ b_k=f(4a_{k-2}+2a_{k-1}+a_k)\ (k=3,4,\cdots,N)$$

と定め、$b_1, b_2, \cdots, b_N$ は $a_1, a_2, \cdots, a_N$ から f によって得られるという。ただし、A から B への写像 f とは、A の各要素 x に対して B の要素 $f(x)$ をただひとつ対応させる規則をさすものとする。次の問に答えよ。

（1）A から B への写像は、全部で何通りあるか。

（2）$f(0)=f(3)=f(4)=f(7)=0$, $f(1)=f(2)=f(5)=f(6)=1$，であるとき、$b_k=\dfrac{1}{2}\{1+(-1)^k\}$（$k=1,2,\cdots,N$）となるような 01 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ を求めよ。

（3）A から B への写像 f が、条件

　(P)　$f(2m)\fallingdotseq f(2m+1)$（$m=0,1,2,3$）

を満たすとする。このような f は何通りあるか。

（4）A から B への写像 f が条件 (P) を満たすならば、どのような N 項からなる 01 数列も、ある 01 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ から f によって得られることを示せ。

指針）（1）と（3）は場合の数のよくある典型問題。（2）と（4）は 2 進表示法(7 章参照)との関連がわからないと難しい。なお $\{a_n\}$ に 2 つの 0 を補って $0, 0, a_1, a_2, \cdots$ とすると b_1, b_2 も $f(4a_{k-2}+2a_{k-1}+a_k)$ で表される。

2003 年度 （文科）

2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。$n=1,2,3,\cdots$ に対し、$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

（1）s_1, s_2, s_3 を求めよ。また、$n\geqq 3$ に対し、s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

（2）s_n は正の整数であることを示し、s_{2003} の 1 の位の数を求めよ。

（3）α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

指針）（1）前半は対称式の基本題。後半も数学的帰納法の重要題でよく見掛ける内容。
（2）後半 → 1 の位の数は 10 で割った余りである。問題 3.13(1) と本質は同じ。（ただしきちんと説明するのはやや骨が折れる。）（3）(2)を用いるだけ。

2003 年度 （理科）

2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。$n=1,2,3,\cdots$ に対し、$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

（1）s_1, s_2, s_3 を求めよ。また、$n\geqq 3$ に対し、s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

（2）β^3 以下の最大の整数を求めよ。

（3）α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

指針）（1）前半は対称式の基本題。後半も数学的帰納法の重要題でよく見掛ける内容。
（3）1 の位の数は 10 で割った余りである。問題 3.13(1) と本質は同じ。（ただしきちんと説明するのはやや骨が折れる。）

2003 年度 （後期）

p, q, N, M を自然数とする。ただし $\sqrt{p}$ は自然数ではないとする。このとき次の問に答えよ。

(1) 自然数 ℓ に対してある整数 A, B があって $\left(\sqrt{p}-[\sqrt{p}]\right)^{\ell}=A\sqrt{p}+B$ と表せることを示せ。ただし $[\sqrt{p}]$ は $\sqrt{p}$ より小さい整数のうちで最大のものを表す。

(2) xy 平面において、x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。このとき、直線 $y=\sqrt{p}x$ との距離が $\dfrac{1}{N}$ 以下で x 座標が N 以上であるような格子点が存在することを示せ。

(3) 双曲線 $y^2-px^2=q$ の上の点 P と格子点 Q で、線分 PQ の長さが $\dfrac{1}{M}$ 以下であるようなものが存在することを示せ。

(4) $p=5, q=2, M=100$ として(3)の条件をみたすような格子点 Q を一つ求めよ。すなわち、格子点 Q であって、双曲線 $y^2-5x^2=2$ の上の点 P を適当にとれば PQ の長さを $\dfrac{1}{100}$ 以下にすることができるようなものを一つ求めよ。ただし $2.23606<\sqrt{5}<2.23607$ を用いてよい。

指針）(1) 数学的帰納法を使うだけで、問題 7.3(1)のより基本的な問題。

(2)(3) 厳密にはいわゆる $\epsilon-N$ 論法を使うことになり、高校数学の範囲を超えた問題である。

2002 年度 （文科・理科共通）

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1) 数列 $a_n, b_n, n=1,2,3,\cdots,$ は $a_{n+1}=a_n+b_n, b_{n+1}=a_n$ を満たすことを示せ。

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対して、a_n, b_n は共に正の整数で、互いに素であることを証明せよ。

指針）問題 2.6 の練習および問題 8.11 の数字が違うだけの内容。

1999 年度 （理科）

(1) k を自然数とする。m を $m=2^k$ とおくとき、$0<n<m$ を満たすすべての整数 n について、二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ。

(2) 以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。

条件 : $0\leqq n\leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である。

指針）(1) 107p 研究参照。(2) やはり 107p 研究で触れていることを使えばよい。さらにパスカルの三角形で偶数・奇数をそれぞれ 0, 1 にしたものを考えると $m=2^k$ の段から 0 だけが並ぶ逆三角形が出来るので、本問ではそれを用いるとわかりやすい。

1999 年度 （後期）

座標平面上の原点を O$(0,0)$ とする。また、x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。

(1) t を正の実数とする。点 P$(-1,0)$ を通り、傾きが t の直線と単位円 $x^2+y^2=1$ との P 以外の交点を Q(t) とする。Q(t) の座標を求めよ。つぎに、$0<s<t$ をみたす 2 つの実数 s,t に対し、線分 Q(s)Q(t) の長さを求めよ。

(2) $\angle \mathrm{Q}(s)\mathrm{PO}=\alpha$, $\angle \mathrm{Q}(t)\mathrm{PO}=\beta$ とし $u=\tan\dfrac{\alpha}{2}$, $v=\tan\dfrac{\beta}{2}$ とおく。もし u,v がともに有理数ならば、線分 Q(s)Q(t) の長さもまた有理数となることを示せ。

(3) 任意に与えられた 3 以上の整数 n に対し、次の条件 (C_1), (C_2), (C_3) をすべてみたす n 個の異なる点 $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_n$ が、座標平面上に存在することを証明せよ。

(C_1) $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_n$ はすべて格子点である。

(C_2) $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_n$ のどの異なる 3 点も一直線上にない。

(C_3) $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_n$ のどの異なる 2 点 $\mathrm{A}_i,\mathrm{A}_j$ に対しても、線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$ の長さは整数である。

指針）(1) と (2) は普通の計算問題。(3) (2)を利用するだけだが・・最小公倍数がポイントか。

最終更新日 2014.1/27